

Последнее редактирование: 23 декабря 2010 г.

На сим записки лекций больше обновляться не будут (последняя лекция 28го декабря). В феврале 2011 для желающих (им надо мне написать) случится семинар по решению задачек.

Содержание

-1 Введение, <i>captatio benevolentiae</i>	2
0 Примеры	3
1 Многообразия, локальный вид	3
2 Многообразия с краем	3
3 Отображения: иммерсии, субмерсии, вложения	4
4 Теорема Уитни о вложениях	4
5 Касательное расслоение	4
6 Теорема Морса-Сарда	5
7 Разбиение единицы	5
8 Функциональные пространства	5
9 Трансверсальность	5
10 Индекс пересечения	6
11 Функции Морса	6
12 Расслоения	6
13 Эйлерова характеристика	6
14 Степень отображения, теоремы об однородности, воротнике, трубчатой окрестности	6
15 Форма объёма	7
16 Дифференциальные формы на многообразиях. Когомологии де Рама	7
17 Йога последовательности Майера-Вьеториса	8
18 Намётки и намёки	8
19 Литература	9

-1 Введение, *captatio benevolentiae*

*Он поставил свой рваный башмак на тропу
войны с мировым бардаком¹*

Это калька к лекциям, а не их запись – не будем плодить копирование текстов².

В начале каждого параграфа указаны номера страниц в учебниках, покрывающих рассказанное на лекциях. Остальное содержание этого³ документа является дополнительным к лекциям.

Формализация является инструментом для проверки интуитивно очевидных утверждений: очевидные утверждения бывают как верными, так и неверными (аксиома выбора, очевидно, верна, теорема Цермелло, ясно дело, нет, а в лемме Цорна, кажется, не хватает каких-то условий [АС]).

Процедура по сути совершенно герменевтическая: как раньше мы говорили «отображение окружности в \mathbb{R}^3 , как правило, не имеет точек самопересечения», так мы будем говорить и в дальнейшем, но будем понимать причину (или аккуратную переформулировку) этого : «в пространстве *всех* отображений окружности в \mathbb{R}^3 , множество отображений с хотя бы одним самопересечением имеет коразмерность 1». Понятие коразмерности тоже должно быть уточнено, конечно. Или: «отображение тора в \mathbb{R}^4 можно пошевелить так, чтобы у образа были лишь изолированные точки самопересечения» означает в точности «множество отображений общего положения всюду плотно в пространстве всех непрерывных отображений».

Поэтому важно как можно более (более, чем это обычно принято при топологических обсуждениях за чаем) уделять внимание техническим деталям - чтобы всегда крепко стоять на несокрушимых ногах формализма и не впадать в *das Man* нечёткость утверждений. Избавимся от кавычек : «в случае достаточно хорошего пространства», «при выполнении естественных требований, возникающих во время доказательства». Вместе с тем, ограниченность жизни, конечно, не позволяет вникать во все детали и иногда я про детали не буду рассказывать, лишь указывать здесь ссылки.

Чтение - это то, что можно дополнительно прочитать по теме. Обычно не очень много.

Упражнение⁴ - если люди будут их делать, можно будет ускориться и пропускать очевидные доказательства, оставляя их в качестве упражнений. В том числе они для самоконтроля - если Вы не можете их сделать, значит, Вы не понимаете, а просто запоминаете правильный порядок слов.

Задачи⁵ - для желающих сдать экзамен по курсу. Оценка "5" выставляется за достаточное количество решённых задач (сдавать – письменно).

Сведения по математическому анализу с самых основ можно быстро и качественно получить из [M. Spivak, Calculus on manifolds].

Исчерпывающий список литературы по топологии от Алана Хэтчера <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/Other/topologybooks.pdf>

¹При этом непонятно, действительно ли К. математик или только выдает себя за одного [Slovar]

²Эко предлагает проанализировать **повторение, копирование, избыточность и подчинение предустановленной схеме** в качестве основных характеристик масс-медийной "эстетики". Действительно, телевизионная реклама, детектив, любой сериал культивируют приемы повторения, без которых они, в принципе, немислимы. Зрителю или читателю, как это ни покажется странным, знание интриги и предсказуемость повествования доставляют немало удовольствия. Но, говорит Эко, это старый прием, который изобрели отнюдь не масс-медиа и уж тем более не в XX веке. Большинство романов XIX века были "повторяющимися" и "серийными" (вспомним, например, о Дюма с его мушкетерами), Песнь о Роланде - предполагала, что все его читатели прекрасно осведомлены о том, что приключилось с Роландом (Ариосто оставалось лишь подумать о способе наррации), то же самое можно было бы сказать о Тристане и Изольде - одна и та же история с небольшими вариациями излагалась различными авторами. Наконец, Шекспир с его Гамлетом, который представляет собой результат смещения нескольких более ранних версий той же истории. Более того, Эко полагает, что именно эта, по большому счету, не-оригинальность иногда являлась причиной "культовости" того или иного произведения.

Оригинальность масс-медиа заключается в том, чтобы рассказать одну и ту же историю разными способами, но эти способы отличны от тех приемов, которые использовались авторами "серийных" романов в XIX веке: мы имеем дело с различными приемами вариаций. Вариации историчны, и благодаря им ни одна "копия не является на самом деле таковой - "все дело в этих маленьких отличиях как говорил небезызвестный персонаж Квентина Тарантино.

За конкретными примерами Эко обращается к тому историческому периоду (нашему), "в котором воспроизведение и повторение кажутся доминирующими во всех видах художественного творчества и где становится трудно разграничить повторение в масс-медиа и, скажем, в высоком искусстве". Для эстетики постмодерна, отличие которой от любой другой эстетической системы состоит прежде всего в специфике её базисных категорий, ключевыми являются понятия повторения и воспроизведения. В Италии эта дискуссия недавно расцвела под знаменем "новой эстетики серийности" [Есо]

³Изначально было "содержание сего ..." но ревнители стиля попросили. Для них же: говорить "вектор суть величина" неправильно, спряжения глагола "быти" таковы:

единственное число : есмь, еси, есть
двойственное число : есва(есвъ), еста, еста(есѣ)
множественное число : есмы, есте, суть.

[Rus]

⁴Уместно упомянуть о факторе принуждения к творчеству [A.Shalito]. Что касается этих лекций по математике - так это добровольный двусторонний процесс - в котором можно как участвовать, так и не участвовать. Так вот, кто не решает упражнения - тот не зайчик. Dixi.

⁵Задачи со звёздочками я не умею решать сам.

Об ошибках и опечатках сообщайте на nikaan.chief.mathcenter.point.spb.point.ru. Комментарии носят необязательный характер и чаще всего несут отпечаток околomатематической культуры, какая она есть в настоящее время. Я воздерживаюсь от интерпретаций и высказывания своего мнения, лишь привожу ссылки.

0 Примеры

Примеры (для того, чтобы захватило дух - это горизонт, к которому мы стремимся, но дойдём не сразу).

1. \sqrt{z}, z^2 . Это отображение $S^2 \rightarrow S^2$ степени два. Кубический трёхчлен - отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ степени один.

2. Касательное расслоение над окружностью - цилиндр. Другое расслоение - лист Мёбиуса. Если пошевелить среднюю линию - всегда будет одно пересечение пошевеленной линии с исходной.

Теперь возьмём касательное расслоение двумерной поверхности, пошевелим её. В четырёхмерном объекте две поверхности пересекаются по набору точек. Их количество - эйлерова характеристика.

3. В пространстве гладких петель в \mathbb{R}^3 множество петель с самопересечением имеет коразмерность 1 - т.е. надо наложить три дополнительных условия, чтобы пересечение появилось, потом два убрать - не фиксировать моменты времени, когда пересечение случилось.

1 Многообразия, локальный вид

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 15-24, [V.Prasolov, CDT] с. 197-201.

Идеология дифференциальной топологии такова: от инфинитизимального к локальному, от локального к глобальному. Первое проистекает из связи дифференциала df_x отображения f в точке x и поведения f в окрестности x (даётся из **теоремы об обратной функции**), а второе возможно по причине **паракомпактности**: мы можем склеивать карты локально конечным образом.

Чтение 1. Инвариантность размерности от точки к точке. ([V.Prasolov, CDT], с. 197)

Чтение 2. Паракомпактные пространства. ([V.Prasolov, CDT], с.107).

Задача 1. Любое подмножество \mathbb{R}^n (с индуцированной топологией) паракомпактно.

Задача 2. Длинная прямая (прямая Александрова⁶) не паракомпактна. См, например [Long line, links]

Задача 3. Для связного локально евклидова пространства выполнение второй аксиомы счётности (существует счётная база топологии) эквивалентно паракомпактности.

Доказательство. \implies . Не умаляя общности, рассмотрим покрытие пространства элементами базы. Не умаляя общности, каждый элемент базы лежит целиком в некоторой карте. Возьмём a_1 - первый элемент базы. Можно ужать все элементы базы, с номерами, большими 1, так, чтобы лишь конечное число их пересекало a_1 (делаем это в карте). Далее работаем с ужатыми множествами. Повторим то же для a_2, a_3, \dots . Итак, каждый элемент базы будет ужат не более, чем его номер раз, и после этого меняться не будет⁷.

\impliedby . Покроем картами. Выберем локально конечное подпокрытие A . Покажем, что в A счётное число множеств - ведь тогда в каждой карте счётная база и в общем тоже счётная база. Назовём открытое множество хорошим, если оно пересекается с конечным числом элементов A - у любой точки есть хорошая окрестность. Возьмём точку и её хорошую окрестность. Любая карта, пересекающая эту окрестность, может быть покрыта счётным числом хороших окрестностей. То же для каждой из этих окрестностей. Объединяя всё это, получаем открытое множество O . И, если какая-то карта пересекает O , она содержится в O , значит, в силу связности, O совпадает с исходным множеством. [Paracompactness]

Задача 4. [M.Hirsh, DT], 1.1.11

Чтение 3. Знакомым с алгебраической топологией можно предложить на пробу [Yuli B. Rudyak]. Речь пойдёт о разнице между топологическими, PL - (т.е. кусочно-линейными) и гладкими многообразиями (класс многообразия задаётся типом функций перехода между картами). По ссылке находится достаточно хорошее переизложение этой темы.

2 Многообразия с краем

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 15-24, [V.Prasolov, CDT] с. 197-201.

⁶Это забавное пространство: каждая возрастающая последовательность в нём имеет предел - ей не убежать на бесконечность, силы её счётны, а у бесконечности на службе первый несчётный ординал.

⁷Задача: у дракона три головы, как только вы отрубаете дракону голову, у него вырастают две новых. Решение: будем нумеровать вырастающие головы. В момент $1 - \frac{1}{2^i}$ будем отрубать i -ую голову. Легко видеть, что к моменту времени 1 ни одной головы у дракона не останется - голова с любым номером будет отрублена.

Замечание об обозначениях 2.1. (см. также [M. Spivak, Calculus on manifolds] с.53).

Выражение $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ у математиков⁸ обычно вызывает физический ужас. Надо трактовать его так

– здесь расписано действие⁹ линейного отображения на вектор $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

df_x будет всегда обозначать дифференциал (или матрицу дифференциала) отображения f в точке x .

Упражнение 1. Докажите теорему об обратной функции¹⁰.

3 Отображения: иммерсии, субмерсии, вложения

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 32-35, [V.Prasolov, CDT] с. 201-204

Упражнение 2. Самим доказать [M.Hirsh, DT] теорему 1.3.1

Упражнение 3. Самим доказать [M.Hirsh, DT] теорему 1.3.2

Упражнение 4. Выучить наизусть теорему о локальном виде иммерсии и субмерсии, теорему о прообразе регулярного значения.

Задача 5. [M.Hirsh, DT] 1.3.11¹¹

4 Теорема Уитни о вложениях

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 35-38, [V.Prasolov, CDT] с. 228-230

Чтение 4. На самом деле мы почти доказали, что множество *вложений* всюду плотно в пространстве всех гладких отображений $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, т.е. любое такое гладкое отображение можно сколь угодно мало пошевелить так, чтобы оно стало вложением. [M.Hirsh, DT] 39-40.

Чтение 5. (Применение меры Хаусдорфа и задачи на тему) [M.Verbitskiy, PDE lectures] лекция 2.

5 Касательное расслоение

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 25-31, [V.Prasolov, CDT] с. 217-220

Замечание 5.1. Действительно, оказывается, что касательное расслоение является дифференциальным инвариантом. Т.е. из касательного расслоения можно выудить характеристические классы Понтрягина (p_1, p_2, \dots) , и можно построить такие гомеоморфные 7-мерные сферы, что у их касательных расслоений будут различные p_1 . Следовательно, эти сферы будут гомеоморфны, но не диффеоморфны [DNF3].

Задача 6. Докажите, что каждое дифференцирование $D: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in M$ задаёт касательный вектор, вдоль которого это дифференцирование и происходит.

Задача 7. [V.Prasolov, CDT] с. 220, упражнение 2.

Чтение 6. Обобщение касательного расслоения для C^0 -многообразий и на прочую¹² природу можно найти по ссылкам [Bundle]

⁸Впрочем, математика убивает креативность – [A. Fursenko] Фурсенко закончил 239 и матмех, а также, говорят, заседал в совете ЮМШ, так что он - знает. Он же: "недостатком советской системы образования была попытка формировать человека-творца, а сейчас задача заключается в том, чтобы взрастить квалифицированного потребителя, способного квалифицированно пользоваться результатами творчества других". Вопрос о связи творчества, креативности, мудрости и пр. является метафизическим и не вписывается в тематику лекций. Остановимся на фактах и не поддадимся желанию их проинтерпретировать.

⁹Впоследствии окажется, что это ковектор (т.е. элемент кокасательного пространства) расписанный по базисным ковекторам. Но сейчас об этом лучше не думать. Лично мне знание об этом никогда не помогало в тех случаях, когда встречалась такая нотация.

¹⁰Кто-то может подумать - что же за этим должно следовать? Смекалистые догадаются: дальше мы доказали, что факт принадлежности точки краю многообразия не зависит от карты [Slovak]

¹¹Если вы продолжите чтение, не решив задачу, может оказаться, что вы будете дурачить себя, вместо того, чтобы самостоятельно нечто для себя открыть.

¹²"Большевики и прочие уже разошлись с прежнего места, они снова начали трудиться над изделиями для тех товарищей, которых они чувствовали своей идеей. "...и прочие заскучали: они оскудели друг для друга и смотрели один на одного без интереса - они стали бесполезны самим себе, между ними не было теперь никакого вещества пользы" Но, истратив все силы на удержание в себе той первоначальной родительской теплоты - против рвущего с корнем встречного ветра чужой, враждебной жизни, - и умножив в себе ту теплоту за счет заработка у именного настоящего народа, прочие создали из себя самодельных людей неизвестного назначения; причем такое упражнение в терпении и во внутренних средствах тела сотворили в прочих ум, полный любопытства и сомнения, быстрое чувство, способное променять вечное блаженство на однородного товарища, потому что этот товарищ тоже не имел ни отца, ни имущества, но мог заставить забыть про то и другое, - и еще несли в себе прочие надежду, уверенную и удачную, но грустную, как утрата." Платонов, Чевенгур.

6 Теорема Морса-Сарда

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 92-98, [V.Prasolov, CDT] с. 205-210

Задача 8. *¹³ (Необходимые условия гладкости в теореме Морса-Сарда) Постройте C^1 -гладкое отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, множество критических значений которого не имеет меры нуль.

7 Разбиение единицы

Материал по [V.Prasolov, CDT] с. 204-205, 224, [M.Hirsh, DT] с. 58-61

Задача 9. Выведите из паракомпактности следующее утверждение¹⁴: для любого многообразия M существует счётная последовательность открытых множеств $\bar{X}_i \subset X_{i+1}, \bigcup X_i = M, X_i$ — компакты.

Задача 10. Докажите теорему Уитни для некомпактного¹⁵ многообразия M . Легко видеть, что достаточно передоказать наличие вложения хоть в какое-нибудь \mathbb{R}^m . Для это воспользуйтесь предыдущей задачей, разбейте на три множества $\bigcup X_{3i+1} \setminus X_{3i}, \bigcup X_{3i+2} \setminus X_{3i+1}, \bigcup X_{3i} \setminus X_{3i-1}$, каждое из них вложите, а потом склейте всеобщее вложение с помощью разбиения единицы (в случае компактного M , при построении первоначального вложения, по существу, пользовались разбиением единицы). [non-compact Whitney]

Замечание 7.1. Для аналитических многообразий (функции склейки карт - аналитические) нет и не может быть аналога разбиения единицы.

8 Функциональные пространства

Материал по [M.Hirsh, DT] с. 48-56.

Чтение 7. (Открытость множества вложений¹⁶) [M.Hirsh, DT] с. 52-53

Задача 11. * Верно ли, что если M не компактно и $\dim N > 0$, то $C_S^r(M, N)$ а) не локально стягиваемо? б) распадается в сумму несчётного числа компонент? ¹⁷

Задача 12. Пространство $C_S^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}), r \geq 0$ не имеет ни в одной точке счётной базы, и, таким образом, неметризуемо. По отношению к обычным операциям оно является топологической группой, но не является топологическим векторным пространством.

Чтение 8. (Повышение гладкости) [M.Hirsh, DT] с. 61-71

Замечание 8.1. Как мы увидели, никакая окрестность гомеоморфизма в $C^0(M, N)$ не состоит из гомеоморфизмов - сколь угодно мало пошевелив, мы заведём склеивающиеся складки. Более того, имеется так называемый, трюк Александра: рассмотрим, например, пространство всех вложений окружности в R^3 с C^0 топологией. Покажем, что любой узел гомотопен тривиальному: в самом деле, будем растягивать вложение, заузленная часть будет становиться всё меньше и меньше, и в пределе перейдёт в точку. Поскольку наша топология заботится только о поточечной сходимости, не о производных, в C^0 топологии мы можем развязать любой узел.

Задача 13. (Alexander's trick¹⁸) Два автогомеоморфизма D^n , совпадающие на граничной сфере, изотопны.

Задача 14. *. Пусть $A \subset \mathbb{R}^3$ - образ непрерывного инъективного отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Верно ли, что $\mathbb{R}^3 \setminus A$ обязательно линейно связно?

9 Трансверсальность

Материал по [Gusein-Zade, DT lectures] лекция 9 стр. 8-11, [M.Hirsh, DT] с. 48-56.

¹³Если же в отношении к каким-либо предметам от человека ускользают его границы, добиваться знания их не следует (Августин Блаженный О бессмертии души. Против академиков, 15)

¹⁴называемое σ -компактностью. Оно эквивалентно паракомпактности и существованию счётной базы, реально приведённое выше доказательство их эквивалентности легко переводится на язык σ -компактности.

¹⁵Обычно её почему-то не доказывают, и не вполне очевидно, верна она или нет.

Бурбаки прославились написанием карманного справочника <Вся математика>. По первоначальному замыслу, это должна была быть небольшая книжка, вкратце излагающая все понятия и теоремы математики в строгом сжатом сухом аксиоматическом стиле, без пояснений о значимости той или иной теоремы. [Absurdopedia]

¹⁶Вопрос о понимании, о соотношении строгости и наглядности в математике, а особенно в геометрии и топологии и поныне широко обсуждается - в том числе и такими известными людьми, как Тёрстон - [W. Thurston]

¹⁷It is this again which explains why the rigid framework of general topology is patiently dragged along by generation after generation of topologists for whom "wildness" is a fatal necessity, rooted in the nature of things[A. Grothendieck]

¹⁸<http://mathoverflow.net/questions/41563/teaching-proofs-in-the-era-of-google>

Чтение 9. (Структурный функтор, пучок¹⁹). [M.Hirsh, DT] с. 72-73 и его применение [M.Hirsh, DT] с. 73-75. Пример пучка трансверсальных ростков [M.Hirsh, DT] с. 101-105.

Чтение 10. (Струи[W.T.Gowers]) Иногда удобно формулировать вопросы с терминах ростков отображений в точке x - т.е. в терминах множества классов эквивалентности гладких функций, где эквивалентными считаются функции, имеющие равные производные в окрестности точки x . [M.Hirsh, DT] с. 82-84 (начинать надо со с. 80). Струйная теорема трансверсальности [M.Hirsh, DT] с. 109-111.

10 Индекс пересечения

Материал²⁰ по [Gusein-Zade, DT lectures] лекция 10 стр. 4-7.

Примеры²¹: [V.Prasolov, CDT] с. 239-246.

11 Функции Морса

Материал по [Gusein-Zade, DT lectures] лекция 10, с.3., [V.Prasolov, CDT] с.261-273, начало [Milnor].

Задача 15. (Лемма Морса) $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет только невырожденные критические точки. Докажите, что существует локальная система координат, центрированная в критической точке, в которой функция f записывается в виде $f(x) = c + \sum \pm x_i^2$.

12 Расслоения

Материал по [Gusein-Zade, DT lectures] лекции 1-2, [V.Prasolov, CDT] с.178-180, [M.Hirsh, DT] с. 117-120.

Задача 16. Прочитать [Gusein-Zade, DT lectures] лекции 1-2 с. 1-7, решить задачи на с.7.

Задача 17. M - многообразие, $A \subset M$ - связное подмножество. Пусть имеется гладкая ретракция $f: M \rightarrow A$, т.е. гладкое отображение $f: M \rightarrow A$ с тождественным сужением $f|_A$. Докажите, что A - подмногообразие.

Задача 18. Для любого $n \geq 1$ существует в точности два класса изоморфных векторных расслоений над S^1 .

Задача 19. Покажите, что гладкие касательные векторные поля на S^2 образуют проективный модуль над кольцом $C^\infty(S^2, \mathbb{R}^1)$.

13 Эйлерова характеристика

Материал по [Gusein-Zade, DT lectures] лекция 10, с.10-12. [M.Hirsh, DT] с. 160-187, [V.Prasolov, CDT] с. 246-250.

14 Степень отображения, теоремы об однородности, воротнике, трубчатой окрестности

[M.Hirsh, DT] с. 146-152, 161-165, [V.Prasolov, CDT] с. 241-246.

Задача 20. Теорема Хопфа: $[M^n, S^n] \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}$ [V.Prasolov, CDT] 253.

Чтение 11. (Конструкция Понтрягина) [V.Prasolov, CDT] с. 257-258.

¹⁹Как я должен наделять нечто мыслимое, вещь под названием "окно" восприятием? Что означает добавление "субъективной способности познания" к объекту? Каким образом благодаря этому получает своё выражение существование объекта? Что же это такое - чреватое восприятием окно, снабжённый "абсолютным полаганием" дом? Мыслимы ли вообще подобные конструкции? Может ли даже самая пылкая фантазия измыслить подобных уродцев - окно, чреватое восприятием? [M. Heidegger]

²⁰Самое время прочитать конспект с самого начала - откроется много нового. Появятся вопросы и желание на них ответить. Отвечайте, да.

²¹Мы имеем дело не с феноменологией, но с тем, с чем она сама имеет дело. Опять же, мы не хотим просто принять к сведению это последнее, чтобы суметь доложить: феноменология, мол, имеет дело с тем-то и тем-то, но в лекциях мы сами заняты этим делом, и вы должны соучаствовать в нём или учиться соучаствовать. Ведь дело не в том, чтобы знать философию, но чтобы уметь философствовать. [M. Heidegger] Замените слова "философия" и "феноменология" на "математика" и применяйте!

Задача 21. Пусть $f: S^k \rightarrow M^n$ вложение с тривиальным нормальным расслоением, тем самым, образ вложения обладает окрестностью $V = S^k \times D^{n-k-1}$. Тогда $\partial V = S^k \times S^{n-k-2}$. Заметим также, что $\partial D^n = \partial D^{k+1} \times D^{n-k-1} = S^k \times D^{n-k-1} \sqcup D^{k+1} \times S^{n-k-2}$. Таким образом, мы можем вырезать V из M^n , и по полученному разрезом краю приклеить $D^{k+1} \times S^{n-k-2}$. Процесс называется хирургией вдоль отображения f , обозначим результат хирургии за M_f^n . Докажите, что M^n кобордантно M_f^n .

Задача 22. Докажите лемму Фельдбау: векторное расслоение над I^n тривиально.
22

Задача 23. (Индекс зацепления) [M.Hirsh, DT] с. 174, задача 7.

Задача 24. (Теорема о неподвижных точках) [M.Hirsh, DT] с. 185, задача 10.

15 Форма объёма

Материал по [V.Prasolov, LA] глава 5.

Определитель матрицы Грамма-Шмидта - это объём в квадрате.²³

Суммирование по повторяющимся индексам²⁴ (правило Эйнштейна).

Чтение 12. (Кобордизмы) [M.Hirsh, DT] с. 220-227.

16 Дифференциальные формы на многообразиях. Когомологии де Рама

Материал по [Gusein-Zade, DT lectures] лекция 7, [V.Prasolov, CDT] с. 224-227, [V.Prasolov, HT] с. 296-298

Определение. $\{C^i\}_{i=0,1,2,\dots}, d_i: C^i \rightarrow C^{i+1}, i = 0, 1, \dots$, где C^i, d_i - абелевы группы и гомоморфизмы между ними, называется коцепным комплексом, если $d_{i+1} \circ d_i = 0$. Обозначается он (C^\bullet, d_\bullet) или, для краткости²⁵, (C, d) . d называется дифференциалом коцепного комплекса C^\bullet .

Определение. Коцепным отображением $f: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ называется $f = f_i | f_i: C^i \rightarrow D^i$ набор гомоморфизмов, согласованных с дифференциалом, т.е. $f d_C = d_D f$ (т.е.²⁶ $f_{i+1} d_i = d_{i+1} f_i$).

Таким образом, коцепные комплексы и коцепные отображения образуют категорию²⁷. Из неё имеется функтор, считающий когомологии: $H: (C, d) \rightarrow H^\bullet(C), H^k(C) := \ker d_k / \text{im} d_{k-1}$.

Упражнение 5. Покажите, что это функтор, т.е. $f: (C, d) \rightarrow (C', d')$ индуцирует отображение $H(f): H^k(C) \rightarrow H^k(C')$.

Интересен вопрос: когда когомологический функтор склеивает стрелки²⁸?

Упражнение 6. Покажите, что если существует такое коцепное отображение $D: (C^\bullet, d) \rightarrow (C'^{\bullet-1}, d')$, что $Dd + dD = f - g$, то $H(f) = H(g)$.²⁹

Основы теории гомологий читать в [V.Prasolov, HT] и [A. Hatcher, AT].

²²Некоторое мнение сообщает: Формулировка математики с мировым именем проверяли верность решения и пришли к выводу, что оно правильное - полностью по Людвигу Флеку, Бурдые и др.: "научная истина" является результатом консенсуса. Как "на самом деле мы не знаем (нам неоткуда взять это знание), но мы делаем утверждение на основании таких-то соображений, и правильность наших выводов о том, как на самом деле, определяется через согласие значимых ("математики с мировым именем") акторов, т.е. экспертов, а это уже вопрос о власти.[PigBig]

²³(Логико-философский трактат. Л. Витгенштейн)4. 003. Большинство предложений и вопросов, высказанных по поводу философских проблем, не ложны, а бессмысленны. Поэтому мы вообще не можем отвечать на такого рода вопросы, мы можем только установить их бессмысленность. Большинство вопросов и предложений философов вытекает из того, что мы не понимаем логики нашего языка. (Они относятся к такого рода вопросам, как: является ли добро более или менее тождественным, чем красота?) И не удивительно, что самые глубочайшие проблемы на самом деле не есть проблемы.

²⁴

А для низкой жизни были числа,
Как домашний подъяремный скот,
Потому что все оттенки смысла
Умно число передаёт.
(Н. Гумилёв, "Слово")

²⁵Имя произносимое не есть истинное имя (Лао-Цзы, Дао Де Цзин)

²⁶Слова особенно сильны, когда они имеют два смысла, когда они живые глаза для тайны и через слюду обыденного смысла просвечивает второй смысл... (В. Хлебников).

²⁷"пока, наконец, она не стала основным инструментом для почти всех математиков, а когомологии не стали естественным языком для многих людей"(предисловие, [M.Kasivara, P.Shapira])

²⁸Любое слово является пучком, и смысл торчит из него в разные стороны, а не устремляется в одну официальную точку"(О. Мандельштам. "Разговор о Данте")

²⁹... русский ум расплывчат, главное для него не решить вопрос, а запутать, ибо русский ум любит слова, а не факты, причем смысл слов не проверяется (И.П. Павлов)

Задача 25. Существует ли такой морфизм $f: (C, d) \rightarrow (C', d')$, что $H(f)$ - изоморфизм, но нет такого $g: (C', d') \rightarrow (C, d)$, что $H(g)$ - обратный к $H(f)$?

Чтение 13. (Примеры и краткое изложение) [DNF3] с.7-22

Дальнейшее разумно³⁰ посмотреть в [R. Bott]. В отличающемся яркостью, краткостью и чрезвычайной понятностью изложении, с самых основ авторы разрабатывают алгебраическую топологию на основе дифференциальных форм. Многие из результатов, которые используются, но не доказываются в книге по причине их наглядности и нежелания увеличивать объём книги, мы доказали в этом курсе, **так что книга крайне рекомендуется к прочтению.**

17 Йога последовательности Майера-Вьеториса

Материал по [R. Bott] с. 42-53.

Последовательность³¹ Майера-Вьеториса может использоваться, в комбинации с 5-леммой, как инструмент глобализации теорем.

Что важно: гомотопия **всегда** по сути строится как усреднение. Возьмём форму в \mathbb{R}^n и будем её усреднять по шарам в нескольких координатах со всё увеличивающимися радиусами. Ясно, что итоговая форма будет гомотопна исходной. ([DNF3] с.12-15).

Конечномерность когомологий и двойственность Пуанкаре³² [R. Bott] с. 51-57.

Формула Кюннета и класс³³, **двойственный подмногообразию** [R. Bott] с. 57-63.

Изоморфизм Тома, класс, двойственный подмногообразию [R. Bott] с. 63-80.

18 Намётки и намёки

- $f: L \rightarrow M$ - вложение. Группы относительных когомологий де Рама $H^*(M, L)$ определяются с помощью конуса ([S.Gelfand, Yu.Manin, GA] с.183) отображения $\Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(L)$. Идея: все относительные гомотопии так определяются (через конус). Доказать изоморфизм Лефшеца (надо дословно повторить доказательство двойственности Пуанкаре) и, возможно, получить его как-нибудь из диаграмм, как и изоморфизм Лефшеца для сингулярных когомологий (пользуясь гомологической алгеброй).
- Техника от локального к глобальному
 - Связь структурного функтора и связки последовательность Майера-Вьеториса (или гомотопий пары) + 5-лемма.
 - Связь аксиоматической теории когомологий и когомологий пучков ([S.Gelfand, Yu.Manin, GA] предисловие). Переформулировка свойств вложения, погружения и т.д. на языке пучков (и их когомологий?)
- Доказательство формулы Лефшеца (про неподвижные точки) через когомологии де Рама? *cup*-произведение, гомологический класс диагонали.
- Теория препятствий и классифицирующие пространства для групп.

³⁰Разумеется, в случаях столь полного совпадения, когда действительность прилаживается и применяется к тому, о чём мы так давно мечтаем, она совершенно скрывает от нас наши мечты, сливается с ними, как две равные фигуры, образующие, после наложения друг на друга, одну, тогда как нам, для того, чтобы придать нашей радости всю полноту её значения, хотелось бы, напротив, сохранить за всеми элементами нашего желания, даже в ту минуту, когда мы их касаемся, тем самым укрепляя свою уверенность в том, что это именно они - престиж недостижимости. И мысль не в силах даже восстановить прежнее состояние, чтобы сопоставить его с этим новым, потому что у неё нет больше свободы действий: знание, приобретённое нами, воспоминание о первых минутах, казавшихся такими несбыточными, услышанные нами слова заграждают вход в наше сознание и завладевают нашей памятью в гораздо большей мере, чем нашим воображением; на наше прошлое, созерцая которое мы уже не властны отвлечься от них, они оказывают задним числом влияние более сильное, чем на будущее, форма которого остаётся ещё свободной.[M. Prust]

³¹Она усматривает его неправильно потому, что для неё первое - это теория, но прежде всего должно быть выполнено одно требование - открыть глаза и вопреки всем прочно укоренившимся теориям и в пику им принимать феномены так, как они даются, т.е. сориентировать теорию на феномены, а не наоборот, насиловать феномены посредством некоей предвзятой теории.[M. Heidegger]

³²Именно потому, что нас окружают не призрачные мечты, которые перестраивались бы по нашей прихоти, бессильные и бескровные, а реальность, имеющая свою жизнь и свои отношения к прочим реальностям, именно поэтому она вязка и требует с нашей стороны усилия, чтобы были завязаны с нею новые связи, чтобы были прорыты в ней новые протоки. Это - символы. Они суть органы нашего общения с реальностью. Ими и посредством их мы соприкасаемся с тем, что было отрезано до тех пор от нашего сознания. Изображением мы видим реальность, а именем - слышим её; символы - это отверстия, пробитые в нашей субъективности. (П. Флоренский)

³³Фрейд верил в победу воли и сознания над инстинктами и влечениями. Ему не хотелось видеть, что «конечный анализ» уходит в бесконечность: вторичные рационализации редко преодолевают бессознательное, но часто усиливают защиты, выстраиваемые против него субъектом. Философский словарь.

19 Литература

[] Многие из этих книг ищутся на <http://poiskknig.ru>. Если для скачивания требуют в непонятной кодировке пароль, зайдите из под другого браузера, IE работает. Многие ценные и интересные вопросы заданы на <http://mathoverflow.net/> – спешите прочесть, ибо это, как и всё хорошее, имеет тенденцию кончаться. Остерегайтесь же и чтения <http://en.wikipedia.org/> - ибо знание формулировок помогало кому-либо только на экзаменах и в разговорах, имеющих целью продемонстрировать образованность. Вики по математике, физике и философии- <http://ncatlab.org/>.

Вообще, о полезности собирать знания по математике в одну большую энциклопедию: [Library]

[Absurdopedia] <http://absurdopedia.wikia.com/wiki/Бурбаки>

[AC] <http://www.mathoverflow.net/questions/7155/famous-mathematical-quotes/>, <http://www.mathoverflow.net/questions/22927/why-worry-about-the-axiom-of-choice/22944#22944>

[Library] математика как энциклопедия <http://lib.ru/FOUNDATION/professia.txt> <http://ignat.livejournal.com/48745.html> <http://kapahel.livejournal.com/283910.html> <http://marina-p.livejournal.com/36779.html>

[R. Bott] Р. Ботт, Л.В. Ту Дифференциальные формы в алгебраической топологии.

[Bundle] <http://ncatlab.org/nlab/show/tangent+bundle>, <http://ncatlab.org/nlab/show/microbundle>, http://www.math.vanderbilt.edu/~hughescb/Publications/1990_Bundle_theories_for_topological_manifolds.pdf.

[DNF3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко "Современная геометрия. Методы теории гомологий" с.300. Также можно найти в <http://mathoverflow.net/questions/7921/failure-of-smoothing-theory-for-topological-4-manifolds> вопрос "когда у недиффеоморфных многообразий изоморфные касательные расслоения"

[A. Fursenko] http://community.livejournal.com/ban_topology/33792.html, <http://community.livejournal.com/matmex/101358.html>

[S.Gelfand, Yu.Manin, GA] С.И.Гельфанд, Ю.И.Манин, "Методы гомологической алгебры".

[A. Grothendieck] А.Гротендик, Sketch of a programme <http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/EsquisseEng.pdf> и до кучи - Урожай и посевы. Ч.1. Самодовольство и обновление <http://kosilova.textdriven.com/narod/studia/groth.htm>

[W.T.Gowers] W. T. Gowers, The Two Cultures of Mathematics <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>

[Gusein-Zade, DT lectures] С.М.Гусейн-Заде, Дифференциальная геометрия (весенний семестр 1996 года, НМУ) <http://ium.mccme.ru/ancient/dgs96.html> – и там много других полезных и интересных лекций.

[A. Hatcher, AT] Allen Hatcher, Algebraic Topology <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
Пожалуй, самая понятная хорошая книжка по алгебраической топологии - оно и неудивительно, Аллен пишет её всю жизнь.

[M. Heidegger] Введение в феноменологию, М.Хайдеггер, ВФРШ, 2001, пер. А.Г.Черняков.

[M.Hirsh, DT] М.Хирш "Дифференциальная топология ссылка $a.b.c$ обозначает главу a , параграф b , сущность c - это обычно теорема или упражнение. Книгу брать на <http://poiskknig.ru>, запрос "Хирш".

[M.Kasivara, P.Shapira] М.Касивара, П. Шапира, "Пучки на многообразиях"

[Long line, links] [http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_\(topology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology)), необходимые знания по теории множеств извлекаются из [Vereschagin, Shen].

<http://mathoverflow.net/questions/229/is-the-long-line-paracompact>,

<http://pages.uoregon.edu/koch/math431/LongLine.pdf>.

См. также "Counterexamples in Topology"(ищется в интернете, кусочек оттуда http://www.mm.sophia.ac.jp/~yoko-yama/1999nen/kika1_5ct.pdf)

[Milnor] Дж. Милнор "Теория Морса".

[non-compact Whitney] <http://www.math.toronto.edu/mgualt/MAT1300/week7.pdf>

[Paracompactness] <http://mathoverflow.net/questions/229/is-the-long-line-paracompact/235#235>, и сто свойств (в т.ч. паракомпактность и счётная база), эквивалентных метризуемости локально евклидоваго пространства <http://arxiv.org/abs/0910.0885>

[PigBig] <http://pigbig.livejournal.com/497881.html> <http://pigbig.livejournal.com/449647.html>

[V.Prasolov, CDT] В.В.Прасолов "Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии МЦНМО 2004.

[V.Prasolov, HT] В.В.Прасолов "Элементы теории гомологий МЦНМО 2006.

[V.Prasolov, LA] В.В.Прасолов "Задачи и теоремы линейной алгебры".

Эти и другие книги В. Прасолова лежат в открытом доступе на <http://www.mccme.ru/prasolov/>

[M. Prust] М.Пруст "Под сенью девушек в цвету".

[Yuli B. Rudyak] Yuli B. Rudyak, Piecewise linear structures on topological manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0105047v1>

[Rus] <http://feb-web.ru/feb/s118/slov-abc/02/s1218508.htm>

[M.Verbitskiy, PDE lectures] <http://verbit.ru/MATH/PDE/>

[Vereschagin, Shen] Н.К. Верещагин, А. Шень, Начала теории множеств. <ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logic/sets/part1ps.zip>

[A.Shalito] http://is.ifmo.ru/belletristic/_prinugdenie_k_tvorchestvu.pdf и http://is.ifmo.ru/education/_shalyto_vs_stepanov.pdf

[Slovar] Словарь культуры XX века, "Замок"<http://www.rudnevslovar.narod.ru/z.htm#zam> Цитата из песни Василия К. "Землемер".<http://www.vassilyk.ru/>. Калька к лекциям является диалогом, где речи главного собеседника (собственно, лектора), пропущены : <http://rudnevslovar.narod.ru/d2.htm#dial> Более того, эти записки можно расценивать как трилог: 1)отсутствующая запись лекций, 2)комментарии и упражнения к лекциям, и 3)ехидные замечания в комментариях.

[M. Spivak, Calculus on manifolds] М. Спивак, Математический анализ на многообразиях.

[W. Thurston] W. Thurston On proof and process in mathematics. <http://arxiv.org/pdf/math/9404236v1>

[Eco] <http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000929/st000.shtml>